

第3讲二次函数

一、二次函数的图象和性质

当 $a > 0, h > 0, k > 0$ 时

函数解析式	$y = ax^2$	$y = ax^2 + k$	$y = a(x - h)^2$	$y = a(x - h)^2 + k$
图象				
对称轴	_____	_____	_____	_____
顶点	_____	_____	_____	_____
最低点	有最____点，最____点为顶点			
函数最小值	_____	_____	_____	_____
图象特征	在对称轴左侧，抛物线从左到右_____ 在对称轴右侧，抛物线从左到右_____			
函数变化规律	当 $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而_____ 当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而_____		当 $x < h$ 时， y 随 x 的增大而_____ 当 $x > h$ 时， y 随 x 的增大而_____	
$ a $ 决定开口大小	$ a $ 越大，开口____； $ a $ 越小，开口____． 在对称轴右侧，沿着逆时针方向， a 的值逐渐_____．			

典题精炼1

- 已知二次函数 $y = x^2$ ，当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而_____（填“增大”或“减小”）。
 - 关于二次函数 $y = -2x^2 + 1$ ，下列说法中正确的是（ ）。
- A. 开口方向是向上

C. 顶点坐标 $(-2, 1)$

B. 当 $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而增大

D. 当 $x = 0$ 时， y 有最大值是 $-\frac{1}{2}$

3. 关于二次函数 $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ 的图象，下列说法正确的是（ ）.

- A. 开口向下
B. 经过原点
C. 对称轴右侧的部分是下降的
D. 顶点坐标是 $(-1, 0)$

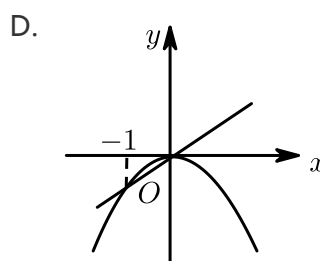
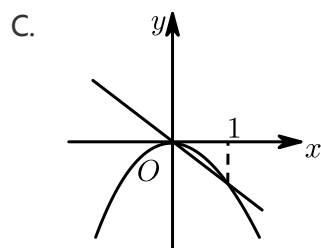
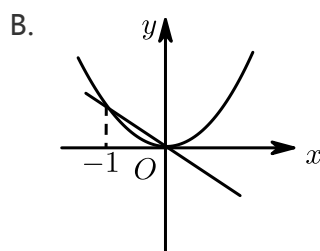
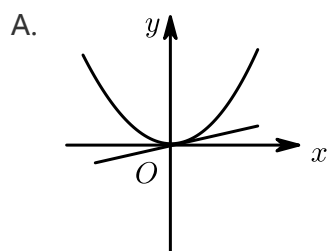
4. 对于抛物线 $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 3$ ，下列结论：

①抛物线的开口向下，②对称轴为直线 $x = 1$ ，③顶点坐标为 $(-1, 3)$ ；④ $x > 1$ 时， y 随 x 的增大而减小，其中正确结论的个数为（ ）.

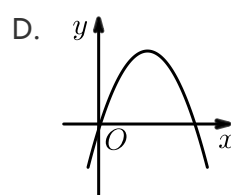
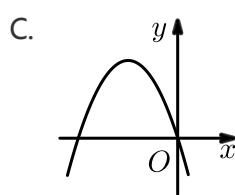
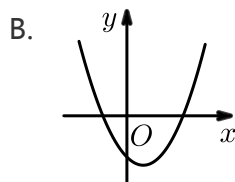
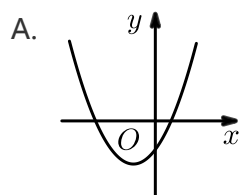
- A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

典题精炼2

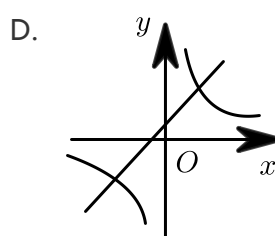
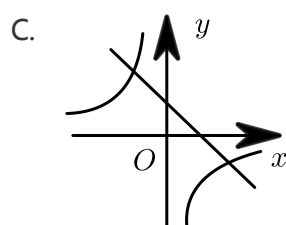
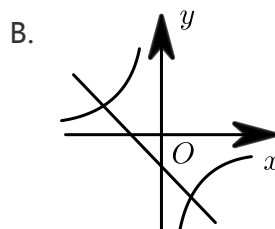
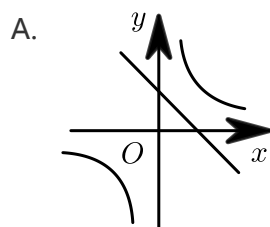
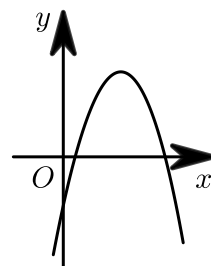
5. 已知 $a \neq 0$ ，在同一直角坐标系中，函数 $y = ax$ 与 $y = ax^2$ 的图象有可能是（ ）.



6. 如图，若一次函数 $y = ax + b$ 的图象经过二、三、四象限，则二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图象可能是（ ）.



7. 已知 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图，则 $y = ax + b$ 和 $y = \frac{c}{x}$ 的图象为（ ）.



二、二次函数的解析式

1. 一般式

$y = ax^2 + bx + c$		
a 的符号	$a > 0$	$a < 0$
开口方向	向_____	向_____
对称轴	$x = \underline{\hspace{2cm}}$	
顶点坐标	$\underline{\hspace{2cm}}$	
函数最值	有最_____值_____	有最_____值_____
	当定义域为全体实数时，函数的最小值或最大值是_____的值	
增减性	当_____时， y 随 x 的增大而_____	当_____时， y 随 x 的增大而_____
	当_____时， y 随 x 的增大而_____	当_____时， y 随 x 的增大而_____
$ a $ 决定开口大小	$ a $ 越大，开口_____； $ a $ 越小，开口_____。 在对称轴右侧，沿着逆时针方向， a 的值逐渐_____。	

 典题精炼1

8. 若点 $A(2, y_1)$, $B(-3, y_2)$, $C(-1, y_3)$ 三点在抛物线 $y = x^2 - 4x - m$ 的图象上, 则 y_1 、 y_2 、 y_3 的大小关系是 ().
- A. $y_1 > y_2 > y_3$ B. $y_2 > y_1 > y_3$ C. $y_2 > y_3 > y_1$ D. $y_3 > y_1 > y_2$
9. 已知二次函数 $y = ax^2 + 2ax + a + 1$, 当 $x = 1$ 时, $y < 0$, 且二次函数图象经过两点 $(-3, m)$ 、 $(2, n)$, 则 m 、 n 的大小关系为 ().
- A. $m = n$ B. $m > n$ C. $m < n$ D. 无法判断
10. 已知二次函数 $y = x^2 + (b+1)x + c$, 若 $x \leq 2$ 时, y 随着 x 增大而减小, 则实数 b 的取值范围是 _____.
11. 对于二次函数 $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 4$, 下列说法正确的是 ().
- A. 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大 B. 当 $x = 2$ 时, y 有最大值 -3
C. 图象的顶点坐标为 $(-2, -7)$ D. 图象与 x 轴有两个交点

 典题精炼2

12. 二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象经过点 $(2, 11)$ 和点 $(-1, -7)$, 则它的解析式为 _____.
13. 已知二次函数的图象经过点 $(-1, -5)$, $(0, -4)$ 和 $(1, 1)$, 则这二次函数的表达式为 ().
- A. $y = -6x^2 + 3x + 4$ B. $y = -2x^2 + 3x - 4$ C. $y = x^2 + 2x - 4$ D. $y = 2x^2 + 3x - 4$
14. 已知抛物线经过点 $(3, 14)$, $(1, 4)$, $(2, 7)$ 三点, 求抛物线解析式.

2. 顶点式

$y = a(x - h)^2 + k$		
a 的符号	$a > 0$	$a < 0$
开口方向	向__	向__
对称轴	_____	_____
顶点坐标	_____	_____
函数最值	有最__值_____	有最__值_____
增减性	当 x ____ 时, y 随 x 的增大而____ 当 x ____ 时, y 随 x 的增大而____	当 x ____ 时, y 随 x 的增大而____ 当 x ____ 时, y 随 x 的增大而____

典题精炼

15. 顶点为(5, 1), 形状与函数 $y = \frac{1}{3}x^2$ 的图象相同且开口方向相反的抛物线是 () .
 A. $y = -\frac{1}{3}(x - 5)^2 + 1$ B. $y = -\frac{1}{3}x^2 - 5$ C. $y = -\frac{1}{3}(x - 5)^2 - 1$ D. $y = \frac{1}{3}(x + 5)^2 - 1$
16. 已知二次函数 $y = -x^2 + 2x - 3$, 用配方法化为 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式, 结果是 () .
 A. $y = -(x - 1)^2 - 2$ B. $y = -(x - 1)^2 + 2$ C. $y = -(x - 1)^2 + 4$ D. $y = -(x + 1)^2 - 4$
17. 已知抛物线的顶点坐标为(-1, 4), 且其图象与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$, 抛物线的解析式为 _____ .

3. 交点式

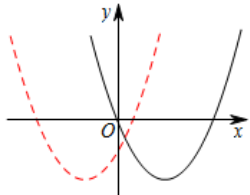
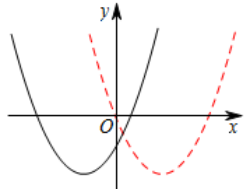
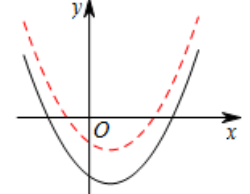
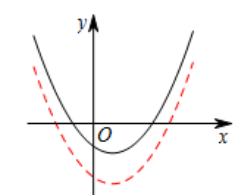
典题精炼

18. 抛物线 $y = (x + 1)(x - 3)$ 的对称轴是直线 () .
 A. $x = -1$ B. $x = 1$ C. $x = -3$ D. $x = 3$
19. 如果抛物线经过点 $A(2, 0)$ 和 $B(-1, 0)$, 且与 y 轴交于点 C , 若 $OC = 2$, 则这条抛物线的解析式是 () .
 A. $y = x^2 - x - 2$ B. $y = -x^2 - x - 2$ 或 $y = x^2 + x + 2$
 C. $y = -x^2 + x + 2$ D. $y = x^2 - x - 2$ 或 $y = -x^2 + x + 2$

20. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $(1, 4)$ ，点 $(-1, 0)$ 和点 $(5, 0)$ ，则该抛物线的解析式为_____.

三、二次函数的几何变换

1. 平移

移动方向	图形	平移后解析式	简记
向左平移 m 个单位		— —	“左____右____， 上____下____； 左右平移在____， 上下平移在____”
向右平移 m 个单位		— —	
向上平移 m 个单位		— —	
向下平移 m 个单位		— —	

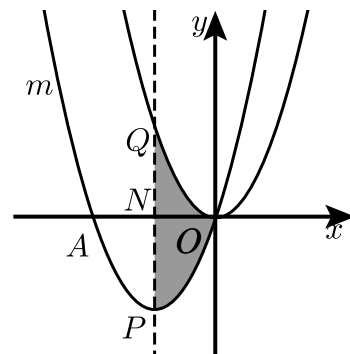
典题精炼

21. 将抛物线 $y = 2(x - 4)^2 - 1$ 先向左平移4个单位长度，再向上平移2个单位长度，平移后所得抛物线的解析式为() .
- A. $y = 2x^2 + 1$ B. $y = 2x^2 - 3$ C. $y = 2(x - 8)^2 + 1$ D. $y = 2(x - 8)^2 - 3$

22. 将抛物线 $y = x^2 - 4x - 4$ 向左平移3个单位，再向上平移5个单位，得到抛物线的表达式为 () .

- A. $y = (x + 1)^2 - 13$ B. $y = (x - 5)^2 - 3$ C. $y = (x - 5)^2 - 13$ D. $y = (x + 1)^2 - 3$

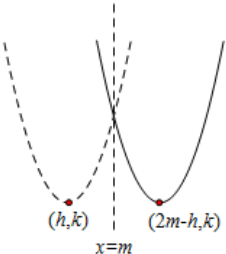
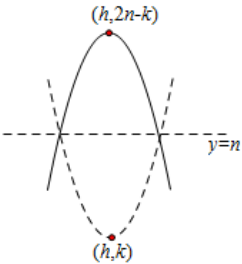
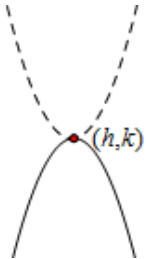
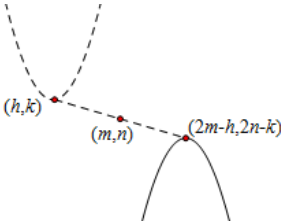
23. 如图，把抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 平移得到抛物线 m ，抛物线 m 经过点 $A(-6, 0)$ 和原点 $O(0, 0)$ ，它的顶点为 P ，它的对称轴与抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 交于点 Q ，则图中阴影部分的面积为 _____ .



2. 对称

对称	图形	对称后解析式	简记
关于 x 轴对称		_____	关于谁对称谁_____, 另外一个变_____, 关于原点对称_____
关于 y 轴对称		_____	
关于原点中心对称		_____	

先将一般式 $y = ax^2 + bx + c$ 化为顶点式 $y = a(x - h)^2 + k$.

对称	图形	对称后解析式
关于直线 $x = m$ 对称		_____
关于直线 $y = n$ 对称		_____
关于顶点中心对称		_____
关于点 (m, n) 中心对称		_____

典题精炼

24. 二次函数 $y = x^2 - 2x + 2$ 的图象关于 x 轴对称的抛物线的解析式为() .

- A. $y = x^2 - 2x + 2$ B. $y = x^2 - 2x$ C. $y = -x^2 + 2x - 2$ D. $y = x^2 + 2x + 2$

25. 在平面直角坐标系中, 先将抛物线 $y = x^2 + x - 2$ 关于 x 轴作轴对称变换, 再将所得的抛物线关于 y 轴作轴对称变换, 那么经两次变换后所得的新抛物线的解析式为() .

- A. $y = -x^2 - x + 2$ B. $y = -x^2 + x - 2$ C. $y = -x^2 + x + 2$ D. $y = x^2 + x + 2$

26. 图象与二次函数 $y = x^2 - 2x + 3$ 的图象关于直线 $x = -1$ 对称的二次函数是() .

- A. $y = x^2 - 2x + 3$ B. $y = x^2 + 6x + 11$ C. $y = x^2 - 2x + 11$ D. $y = x^2 + 6x - 3$

27. 如图, 将抛物线 $l: y = 2x^2 - 4x + 3$ 沿直线 $y = -1$ 翻折得到抛物线 l' , 则抛物线 l' 的解析式为() .

- A. $y = -2x^2 - 4x - 5$ B. $y = -2x^2 + 4x + 3$ C. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 5$ D. $y = -2(x-1)^2 - 3$

28. 二次函数 $y = x^2 + 3x + 2$ 的图象关于其顶点对称的图象的解析式是 _____ .

29. 二次函数 $y = x^2 + x + 1$ 的图象关于点 $A(2, 0)$ 对称的图象的解析式是 _____ .

3. 旋转

典题精练

30. 把抛物线 $y = 2x^2 - 4x - 5$ 绕顶点旋转 180° , 得到的新抛物线的解析式是() .

- A. $y = -2x^2 - 4x - 5$ B. $y = -2x^2 + 4x + 5$ C. $y = -2x^2 + 4x - 9$ D. 以上都不对

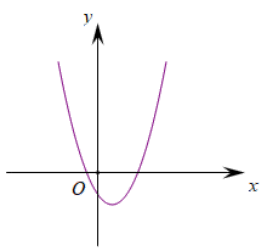
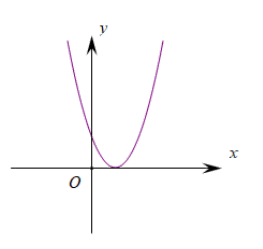
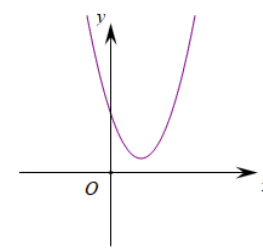
31. 将抛物线 $y = x^2 + 2x + 3$ 绕点 $(-1, 0)$ 旋转 180° , 得到的抛物线的解析式为() .

- A. $y = x^2 - 2x + 3$ B. $y = -x^2 + 2x - 3$ C. $y = -x^2 - 2x - 1$ D. $y = -x^2 - 2x - 3$

四、二次函数与方程、不等式

1. 二次函数与方程

方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解可以看做函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交点的横坐标, 交点的个数决定方程解的个数.

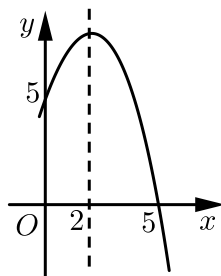
			
与x轴交点个数	___	___	___
判别式	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
根的情况	有___实根	有___实根	___实数根

典题精炼

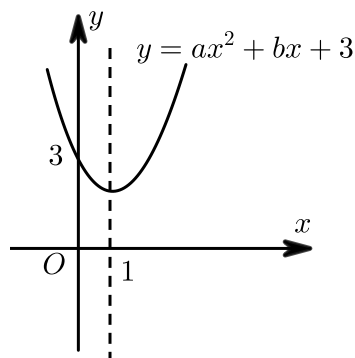
32. 已知函数 $y = (k - 3)x^2 + 2x + 1$ 的图象与 x 轴有交点，则 k 的取值范围是 () .

- A. $k < 4$ B. $k \leq 4$ C. $k < 4$ 且 $k \neq 3$ D. $k \leq 4$ 且 $k \neq 3$

33. 已知二次函数 $y = -x^2 + 4x + m$ 的部分图象如图所示，则关于 x 的一元二次方程 $-x^2 + 4x + m = 0$ 的解是 _____ .

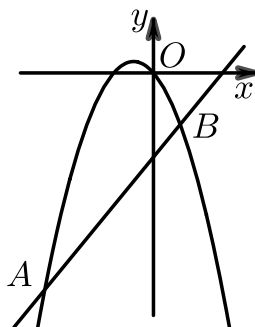


34. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ ($a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x = 1$ ，如果关于 x 的方程 $ax^2 + bx - 8 = 0$ ($a \neq 0$) 的一个根为 4，那么该方程的另一个根为 () .



- A. -4 B. -2 C. 1 D. 3

35. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx$ 与直线 $y = mx + n$ 相交于点 $A(-3, -6)$ ， $B(1, -2)$ ，则关于 x 的方程 $ax^2 + bx = mx + n$ 的解为 _____ .

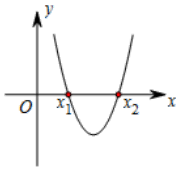
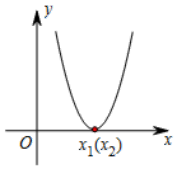
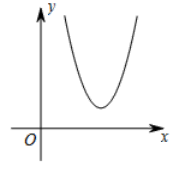


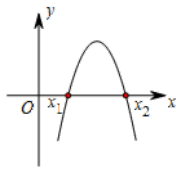
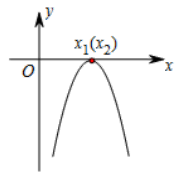
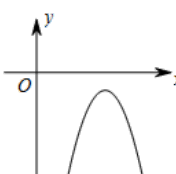
36. 已知二次函数 $y = 1 - (x - a)(x - b)$ ，其中 $a < b$ ， m 、 n ($m < n$) 是方程 $1 - (x - a)(x - b) = 0$ 的两个根，则实数 a 、 b 、 m 、 n 的大小关系是 () .

- A. $a < m < n < b$ B. $m < a < b < n$ C. $a < m < b < n$ D. $m < a < n < b$

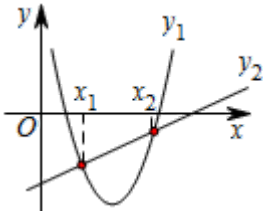
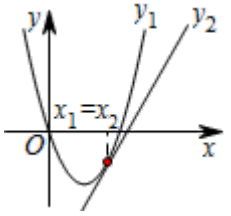
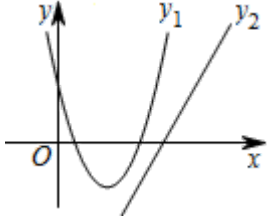
37. 已知抛物线 $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}x + 6$ 与 x 轴交于点 A , 点 B , 与 y 轴交于点 C , 若 D 为 AB 的中点, 则 CD 的长为 ().
- A. $\frac{15}{4}$ B. $\frac{9}{2}$ C. $\frac{13}{2}$ D. $\frac{15}{2}$

2. 二次函数与不等式

	图象	与 x 轴的交点情况	$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集	$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集
$a > 0$		有两个交点	_____	_____
		有一个交点	$x \neq x_1$ (或 $x \neq x_2$)	无解
		无交点	全体实数	无解

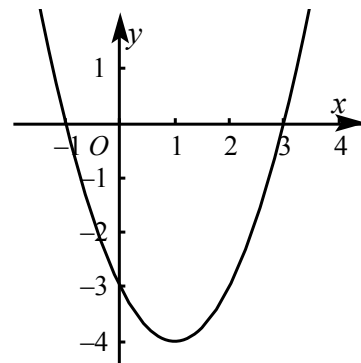
	图象	与 x 轴交点情况	$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集	$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集
$a < 0$		有两个交点	_____	_____
		有一个交点	无解	$x \neq x_1$ (或 $x \neq x_2$)
		无交点	无解	全体实数

抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c$, 直线 $y_2 = mx + n(m > 0)$ 的不等关系

图象	两个函数的交点情况	$y_1 > y_2$ 的解集	$y_1 < y_2$ 的解集
	有两个交点	_____	_____
	有一个交点	_____	无解
	无交点	全体实数	无解

典题精炼

38. 二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象如图所示, 当 $y < 0$ 时, 自变量 x 的取值范围是() .



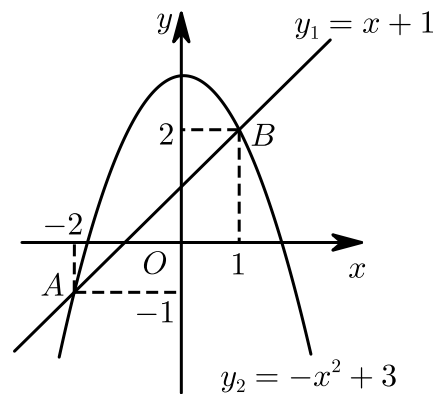
A. $-1 < x < 3$

B. $x < -1$

C. $x > 3$

D. $x < -1$ 或 $x > 3$

39. 直线 $y_1 = x + 1$ 与抛物线 $y_2 = -x^2 + 3$ 的图象如图，当 $y_1 > y_2$ 时， x 的取值范围为（ ）。



- A. $x < -2$ B. $x > 1$ C. $-2 < x < 1$ D. $x < -2$ 或 $x > 1$

40. 直线 $y = mx + n$ 和抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 在同一坐标系中位置如图所示，那么不等式 $mx + n < ax^2 + bx + c < 0$ 的解集是 _____。

